۱- مقادیر a، $2a+1$ و $5-a$ به‌ترتیب جملات متوالی یک دنباله حسابی هستند. اگر a جمله نخست این دنباله باشد، جمله نهم کدام است؟

۱) ۲/۷۵ ۲) ۴/۲۵ ۳) ۱۲/۲۵ ۴) ۱۴/۷۵

پاسخ ۴

ابتدا جملات دنباله را مرتب می‌کنیم:

$a, 1+2a, 5-a$

جمله دوم، واسطه حسابی بین جملات اول و سوم است.

$$2(1+2a) = (a) + (5-a) \Rightarrow 2+4a = 5 \Rightarrow 4a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

پس جملات دنباله به صورت $\frac{3}{4}$ و $\frac{5}{2}$ و $\frac{17}{4}$ و ... است.

اکنون قدر نسبت دنباله را به دست می‌آوریم:

$$d = a_2 - a_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$$

جمله نهم برابر است با:

$$a_9 = a_1 + 8d = \frac{3}{4} + 8\left(\frac{7}{4}\right) = ۱۴/۷۵$$

۳- نقاط $(۳,-۴)$ و $(-۱٫۵,-۴)$ روی یک تابع درجه دوم واقع هستند. مجموع صفرهای این تابع کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۴}$

پاسخ ۱

نقاط داده شده از این سهمی، دارای عرض یکسان هستند؛ بنابراین طول راس سهمی، میانگین طول این دو نقطه است.

همچنین در تابع درجه دو $f(x) = ax^۲ + bx + c$، طول راس سهمی برابر $x_s = \frac{-b}{۲a}$ است.

$$x_s = \frac{۳+(-۱٫۵)}{۲} = \frac{۳}{۴} = \frac{-b}{۲a}$$

از طرفی می‌دانیم مجموع صفرهای این تابع درجه دو برابر $\frac{-b}{a}$ است، بنابراین:

$$\frac{-b}{a} = ۲\left(\frac{-b}{۲a}\right) = ۲\left(\frac{۳}{۴}\right) = \frac{۳}{۲}$$

۴- اختلاف ریشه‌های معادله $x^2+2kx+5=0$ برابر $\frac{4}{3}k$ است. مقدار $\left[\frac{k^2}{2}\right]$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ ۴

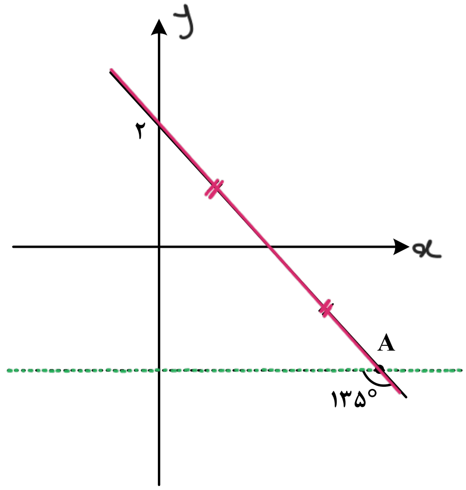
در معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ ، حاصل اختلاف ریشه‌ها برابر $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ است.

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{4}{3}k \Rightarrow \frac{\sqrt{4k^2-20}}{|1|}=\frac{4}{3}k \Rightarrow 4k^2-20=\frac{16}{9}k^2$$

$$\Rightarrow 4k^2-\frac{16}{9}k^2=20 \Rightarrow \frac{20}{9}k^2=20 \Rightarrow k^2=9 \Rightarrow \frac{k^2}{2}=4.5$$

بنابراین حاصل $\left[\frac{k^2}{2}\right]=[4.5]=4$ است.

۵- در شکل زیر، فاصله نقطه A از مبدأ مختصات کدام است؟



۱) $۲\sqrt{۵}$

۲) $۳\sqrt{۶}$

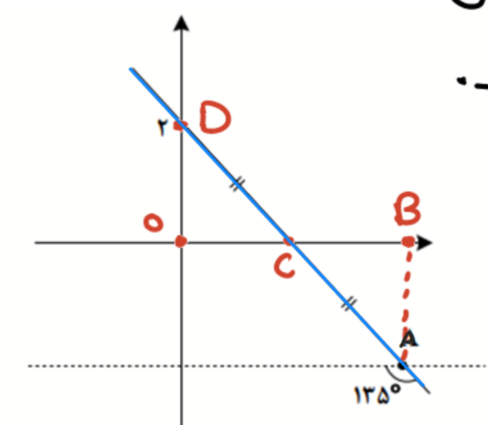
۳) $۴\sqrt{۳}$

۴) $۵\sqrt{۲}$

پاسخ ۱

ابتدا معادله خط داده‌شده را پیدا می‌کنیم. زاویه خط با جهت مثبت محور xها برابر ۱۳۵° و عرض از مبدأ آن برابر ۲ است. پس معادله خط به صورت $y=-x+2$ است.

طول نقطه C، یعنی محل برخورد خط با محور xها برابر ۲ است.



در نمودار داده‌شده، چون $DC = AC$ است، پس $OC = BC$ است و طول نقطه B برابر ۴ می‌شود.

اکنون مختصات نقطه A را به دست می‌آوریم:

$$y=-x+2 \xrightarrow{x=4} y=-2 \longrightarrow A(4,-2)$$

فاصله نقطه A از مبدأ برابر است با:

$$OA=\sqrt{4^2+(-2)^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

۶- اگر $f(x) = x^{۲} - [x]$ و $f(af(\sqrt{۵})) = ۲$ باشد، کدام می‌تواند مقدار **a** باشد؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $-\frac{۱}{۵}$

پاسخ ۲

ابتدا حاصل $f(\sqrt{۵})$ را به دست می‌آوریم:

$$f(\sqrt{۵}) = (\sqrt{۵})^{۲} - [\sqrt{۵}] = ۵ - ۲ = ۳$$

اکنون معادله $f(af(\sqrt{۵})) = f(۳a) = ۳$ را حل می‌کنیم:

$$f(۳a) = (۳a)^{۲} - [۳a] = ۲ \Rightarrow ۹a^{۲} - [۳a] = ۲$$

با توجه به گزینه‌ها، تنها $a = \frac{۱}{۳}$ مورد قبول است.

۷- برای چند مقدار صحیح و یک رقمی a، جواب معادله $\sqrt{x}+\sqrt{x-a}=a$، عددی صحیح است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ ۳

ابتدا عبارت $\sqrt{x-a}$ را تنها می‌کنیم و طرفین تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sqrt{x}+\sqrt{x-a}=a \Rightarrow \sqrt{x-a}=a-\sqrt{x} \Rightarrow x-a=a^2+x-2a\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}=\frac{a^2+a}{2a}=\frac{\cancel{a}(a+1)}{2\cancel{a}}=\frac{a+1}{2} \Rightarrow x=\left(\frac{a+1}{2}\right)^2$$

دقت کنید چون عبارت a را ساده کردیم، باید جواب $a=0$ را بررسی کنیم که قابل قبول است.

اکنون به بررسی جواب $x=\left(\frac{a+1}{2}\right)^2$ می‌پردازیم. طبق صورت سوال، x عددی صحیح است، به این منظور $\frac{a+1}{2}$ باید عددی صحیح باشد. پس a عددی فرد است.

با بررسی مقادیر مختلف a، جواب‌های قابل قبول برای x را به دست می‌آوریم:

$a=1 \longrightarrow x=1$

$a=3 \longrightarrow x=4$

$a=5 \longrightarrow x=9$

$a=7 \longrightarrow x=16$

$a=9 \longrightarrow x=25$

بنابراین ۶ جواب قابل قبول برای a وجود دارد.

۸- به‌ازای کدام مقدار a، نمودار تابع وارون تابع $f(x) = x^۳ + ۶x^۲ + ax + ۱$ خط $۱۰y - x = -۱۰$ را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۲ ۳) ۹ ۴) ۵

پاسخ ۲

ابتدا مختصات نقطه برخورد را به کمک ضابطه خط به دست می‌آوریم:

$$10y - x = -10 \xrightarrow{y=1} 10 - x = -10 \Rightarrow x = 20$$

پس مختصات نقطه برخورد تابع f^{-1} با خط برابر $(20, 1)$ است و این نقطه روی تابع f^{-1} قرار دارد، یعنی $f^{-1}(20) = 1$ است. داریم:

$$f^{-1}(20) = 1 \Rightarrow f(1) = 20 \Rightarrow (1)^3 + 6(1)^2 + a(1) + 1 = 20 \Rightarrow a = 12$$

۹- اگر $\log_2(x^2+2x+4)+\log_2(x-2)=3$ باشد، مقدار $\log_{\sqrt[3]{2}} x$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ ۴

طبق خواص لگاریتم، مجموع دو عبارت لگاریتمی را می‌توان به صورت ضرب آرگومان‌های آن‌ها نوشت:

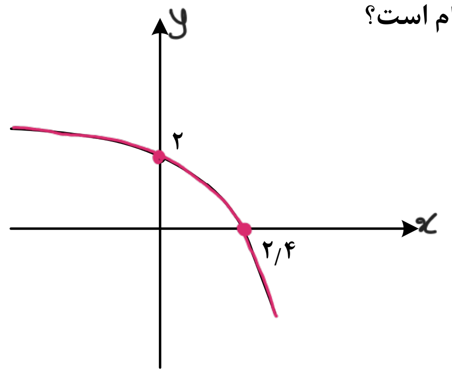
$$\log_2(x^2+2x+4)+\log_2(x-2)=3 \Rightarrow \log_2(x^2+2x+8)(x-2)=3$$

$$\Rightarrow \underbrace{(x^2+2x+4)(x-2)}_{x^3-8}=2^3=8 \Rightarrow x^3-8=8 \Rightarrow x^3=16 \Rightarrow x=\sqrt[3]{16}$$

اکنون حاصل $\log_{\sqrt[3]{2}} x$ را به دست می‌آوریم:

$$\log_{\sqrt[3]{2}} x=\log_{\sqrt[3]{2}} \sqrt[3]{16}=\frac{4/3}{1/3}\log_2 2=4$$

۱۰- نمودار تابع $y=c+\log_{5}(ax+b)$ به صورت زیر است. حاصل $\frac{a}{b}$ کدام است؟



۱) $-\frac{2}{5}$

۲) $-\frac{3}{5}$

۳) $-\frac{1}{10}$

۴) $-\frac{3}{10}$

پاسخ ۱

با جایگذاری مختصات نقاط داده شده در ضابطه تابع داریم:

$$f(0)=2 \Rightarrow c+\log_{5} b=2$$

$$f(2/4)=0 \Rightarrow c+\log_{5} (2/4a+b)=0$$

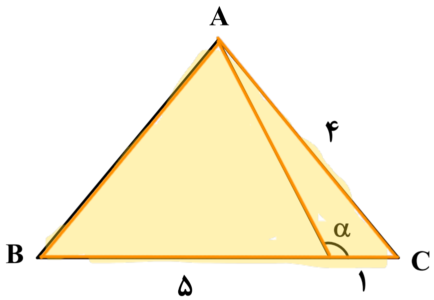
اگر طرفین معادله پایین را از معادله بالا کم کنیم داریم:

$$c+\log_{5} b-(c+\log_{5}(2/4a+b))=2 \Rightarrow \log_{5} b-\log_{5}(2/4a+b)=2 \Rightarrow \log_{5}\frac{b}{2/4a+b}=2$$

$$\Rightarrow \frac{b}{2/4a+b}=5^2=25 \Rightarrow b=60a+25b \Rightarrow -24b=60a$$

بنابراین حاصل $\frac{a}{b}=\frac{-24}{60}=\frac{-2}{5}$ است.

۱۱- در شکل زیر، مثلث ABC متساوی‌الساقین است. مقدار $\tan\alpha$ کدام است؟



۱) $-\frac{2}{5}$

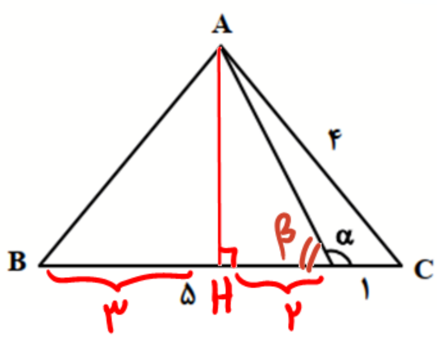
۲) $\frac{2}{5}$

۳) $-\frac{\sqrt{7}}{2}$

۴) $\frac{\sqrt{7}}{2}$

پاسخ ۳

ابتدا از راس A، عمودی بر ضلع BC رسم می‌کنیم:



به کمک رابطه فیثاغورس در مثلث $A\hat{H}C$، طول AH را به‌دست می‌آوریم:

$$AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{16-9} = \sqrt{7}$$

اکنون $\tan(\alpha)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\tan(\alpha) = \tan(180-\beta) = -\tan(\beta) = \frac{-\sqrt{7}}{2}$$

۱۲- حاصل عبارت $(۳\cos ۴x+\sqrt{۲}\sin x-\sqrt{۲}\cos x)$ به‌ازای $x=\frac{\pi}{۱۲}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\sqrt{۲}$
۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

پاسخ ۲

با جایگذاری $x=\frac{\pi}{۱۲}$ در عبارت داریم:

$$۳\cos\frac{\pi}{۳}+\sqrt{۲}\sin\frac{\pi}{۱۲}-\sqrt{۲}\cos\frac{\pi}{۱۲}=\frac{۳}{۲}+\sqrt{۲}\left(\sin\frac{\pi}{۱۲}-\cos\frac{\pi}{۱۲}\right)$$

حالا فرض می‌کنیم $A=\sin\frac{\pi}{۱۲}-\cos\frac{\pi}{۱۲}$ است. توجه کنید

$\sin\frac{\pi}{۱۲}<\cos\frac{\pi}{۱۲}$ است، پس $A<0$ می‌باشد و داریم:

$$A^۲=\left(\sin\frac{\pi}{۱۲}-\cos\frac{\pi}{۱۲}\right)^۲=\sin^۲\frac{\pi}{۱۲}+\cos^۲\frac{\pi}{۱۲}-۲\sin\frac{\pi}{۱۲}\cos\frac{\pi}{۱۲}$$

$$\Rightarrow A^۲=۱-\sin\frac{\pi}{۶}=۱-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}\xrightarrow[A<0]{\sqrt{\ }}A=-\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

پس حاصل عبارت مورد نظر برابر است با:

$$\frac{۳}{۲}+\sqrt{۲}\left(\sin\frac{\pi}{۱۲}-\cos\frac{\pi}{۱۲}\right)=\frac{۳}{۲}+\sqrt{۲}\times\left(-\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)=\frac{۳}{۲}-۱=\frac{۱}{۲}$$

۱۳- حاصل عبارت $\frac{\sin^{4}\alpha+4\cos^{2}\alpha}{1+\cos^{2}\alpha}-\frac{\cos^{4}\alpha+4\sin^{2}\alpha}{1+\sin^{2}\alpha}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\cos 2\alpha$ ۴) $\sin 2\alpha$

پاسخ ۳

$$\frac{\sin^4(\alpha)+4\cos^4(\alpha)}{1+\cos^2(\alpha)}-\frac{\cos^4(\alpha)+4\sin^2(\alpha)}{1+\sin^2(\alpha)}=\frac{\sin^4(\alpha)+4\left(1-\sin^2(\alpha)\right)}{1+\left(1-\sin^2(\alpha)\right)}-\frac{\cos^4(\alpha)+4\left(1-\cos^2(\alpha)\right)}{1+\left(1-\cos^2(\alpha)\right)}$$

$$=\frac{\sin^4(\alpha)-4\sin^2(\alpha)+4}{2-\sin^2(\alpha)}-\frac{\cos^4(\alpha)-4\cos^2(\alpha)+4}{2-\cos^2(\alpha)}=\frac{\left(2-\sin^2(\alpha)\right)^2}{2-\sin^2(\alpha)}-\frac{\left(2-\cos^2(\alpha)\right)^2}{2-\cos^2(\alpha)}$$

$$=\left(2-\sin^2(\alpha)\right)-\left(2-\cos^2(\alpha)\right)=\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)=\cos(2\alpha)$$

راه حل تستی:

با جایگذاری $\alpha=\frac{\pi}{4}$ در عبارت داریم:

$$\alpha=\frac{\pi}{4}\longrightarrow\frac{\sin^4(\pi/4)+4\cos^4(\pi/4)}{1+\cos^2(\pi/4)}-\frac{\cos^4(\pi/4)+4\sin^4(\pi/4)}{1+\sin^2(\pi/4)}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}+4\left(\frac{1}{4}\right)}{1+\frac{1}{2}}-\frac{\frac{1}{4}+4\left(\frac{1}{4}\right)}{1+\frac{1}{2}}=0$$

تنها گزینه ۳ به ازای $\alpha=\pi/4$، برابر صفر می‌شود.

۱۴- مجموع جواب‌های معادله $\cos 2x+\sin^2 x=0$ در بازهٔ $[-3\pi,\pi]$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $-\pi$ ۳) -3π ۴) -4π

پاسخ ۴

در معادله داده شده، به جای $\sin^2(x)$، عبارت $\frac{1-\cos(2x)}{2}$ را جایگذاری می‌کنیم:

$$\cos(2x)+\sin^2(x)=0 \Rightarrow \cos(2x)+\frac{1-\cos(2x)}{2}=0 \Rightarrow 2\cos(2x)+1-\cos(2x)=0$$

$$\Rightarrow \cos(2x)=-1=\cos(\pi) \Rightarrow 2x=2k\pi\pm\pi \Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{2}$$

جواب های داخل بازه $[-3\pi, \pi]$ برابر $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{-\pi}{2}$ و $\frac{-3\pi}{2}$ و $\frac{-5}{2}$ هستند که مجموع آنها برابر است با:

$$-\frac{5\pi}{2}+\frac{-3\pi}{2}+\frac{-\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\frac{-8\pi}{2}=-4\pi$$

۱۵- مجموع مقادیر حدهای چپ و راست تابع $f(x)=\frac{x-۲}{x^۲-[x^۲]}$ در نقطه $x=۲$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) صفر

پاسخ ۱

حد چپ و حد راست تابع را در نقطه $x=۲$ محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{x-۲}{x^۲-[x^۲]}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{x-۲}{x^۲-۴}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{x-۲}{(x-۲)(x+۲)}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۱}{x+۲}=\frac{۱}{۴}$$

$$\lim_{x\to ۲^-}\frac{x-۲}{x^۲-[x^۲]}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{x-۲}{x^۲-۳}=\frac{۰}{۱}=۰$$

بنابراین مجموع حد چپ و حد راست تابع $f(x)$ در نقطه $x=۲$ برابر $\frac{۱}{۴}+۰=\frac{۱}{۴}$ است.

۱۷- تابع $f(x)=\begin{cases}(1-a)[x]+(3a^2-1)[-x] & x\notin\mathbb{Z}\\ b\sin(\frac{\pi}{a}) & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$ روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است. مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟

۱) صفر   ۲) ۱   ۳) ۲   ۴) ۳

پاسخ ○ برای این که تابع f روی مجموعهٔ اعداد حقیقی پیوسته باشد، باید در همهٔ نقاط صحیح پیوسته باشد. پس عدد صحیح n را در نظر می‌گیریم و پیوستگی تابع f را در این نقطه بررسی می‌کنیم:

۱) حد راست در $x=n$: $x>n \Rightarrow \begin{cases}[x]=n\\ [-x]=-n-1\end{cases}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to n^+} f(x)=\lim (1-a)\times n+(3a^2-1)\times(-n-1)=(-3a^2-a+2)n+(1-3a^2)$$

۲) حد چپ در $x=n$: $x<n \Rightarrow \begin{cases}[x]=n-1\\ [-x]=-n\end{cases}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to n^-} (1-a)(n-1)+(3a^2-1)(-n)=(-3a^2-a+2)n+(a-1)$$

حالا حد چپ و راست را برابر هم قرار می‌دهیم:

$$1-3a^2=a-1 \Rightarrow 3a^2+a-2=0 \Rightarrow \begin{cases}a=-1\\ a=\frac{2}{3}\end{cases}$$

به ازای $a=-1$ مقدار تابع در xهای صحیح برابر $b\sin(-\pi)=0$ می‌شود که با حد تابع برابر نیست و در نتیجه تابع پیوسته نیست. پس $a=\frac{2}{3}$ قابل قبول است:

$$\lim_{x\to n^+} f(x)=(-3a^2-a+2)n+(1-3a^2)=0+1-3(\tfrac{2}{3})^2=-\tfrac{1}{3}$$

$$f(n)=b\sin\left(\frac{\pi}{\frac{2}{3}}\right)=b\sin\frac{3\pi}{2}=-b \Rightarrow -b=-\tfrac{1}{3} \Rightarrow b=\tfrac{1}{3}$$

پس $\frac{a}{b}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}=2$ است.

ادامه صفحه بعد

روش سریعتر: یک عدد صحیح دلخواه، مثلاً $x=1$ را در نظر بگیرید و پیوستگی تابع را در $x=1$ بررسی کنید.

۱۸- اگر $f(x)=\sqrt{x+8}-\sqrt{x}$ و $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+8}+\sqrt{x}}$ باشد، حاصل عبارت $f'(1)g(1)-g'(1)f(1)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۲

پاسخ ۱

عبارت خواسته شده برابر صورت کسر مشتق تابع $\dfrac{f}{g}$ است، پس:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{x+8}-\sqrt{x}}{\dfrac{1}{\sqrt{x+8}+\sqrt{x}}}=\left(\sqrt{x+8}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+8}+\sqrt{x}\right)$$

$$=(x+8-x)=8$$

حال از این تابع مشتق می‌گیریم:

$$\Rightarrow \frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{\left(g(x)\right)^2}=0 \Rightarrow f'(1)g(1)-g'(1)f(1)=0$$

۱۹- به‌ازای چند مقدار صحیح m، تابع $y=\dfrac{mx+۲}{x-۱+m}$ روی بازهٔ $(۱,+\infty)$ نزولی است؟ $(m\neq ۲)$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ ۲

تابع y روی بازهٔ $(۱,+\infty)$ اکیداً نزولی است، پس y' باید منفی باشد:

$$y=\frac{mx+۲}{x-۱+m} \Rightarrow y'=\frac{m(m-۱)-۲}{(x-۱+m)^۲}=\frac{m^۲-m-۲}{(x-۱+m)^۲}<۰$$

$$\Rightarrow m^۲-m-۲<۰ \Rightarrow -۱<m<۲$$

در ضمن نباید ریشهٔ مخرج کسر یعنی $x=m-۱$ درون بازهٔ $(۱,+\infty)$ باشد، پس:

$$۱-m\leq ۱ \Rightarrow ۰\leq m$$

از اشتراک مقادیر به‌دست آمده نتیجه می‌گیریم $۰\leq m<۲$ است که دو عدد صحیح $m=۰$ و $m=۱$ را شامل می‌شود.

۲۰- به‌ازای هر مقدار حقیقی و ناصفر a، تابع $f(x)=\begin{cases} bx+c & x<a \\ \frac{1}{x} & x\geq a \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. مقدار ac کدام است؟

۱) -1 ۲) 1 ۳) -2 ۴) 2

پاسخ ۴

ابتدا پیوستگی تابع f را در $x=a$ بررسی کنیم:

$$f(a)=\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^+}\frac{1}{x}=\frac{1}{a}$$

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^-}(bx+c)=ab+c$$

$$\Rightarrow ab+c=\frac{1}{a}\xrightarrow{\times a} ba^2+ac=1\ (*)$$

حالا مشتق چپ و راست را در $x=a$ بررسی می‌کنیم:

$$f'(x)=\begin{cases} b & ; x<a \\ -\frac{1}{x^2} & ; x\geq a \end{cases}\xrightarrow{\text{در نقطهٔ } a} b=-\frac{1}{a^2}\Rightarrow ba^2=-1\ (**)$$

با توجه به رابطه‌های $(*)$ و $(**)$ داریم:

$$\begin{cases} ba^2+ac=1 \\ ba^2=-1 \end{cases}\Rightarrow -1+ac=1\Rightarrow ac=2$$

روش سریع: می‌توانستیم عدد دلخواه $a=1$ قرار بدهیم و سپس مقادیر b و c را در حالت خاص پیدا کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} bx+c & ; x<1 \\ \frac{1}{x} & ; x\geq 1 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} \text{پیوستگی}: b+c=1 \\ \text{مشتق‌پذیری}: b=-1 \end{cases}\Rightarrow c=2\Rightarrow ac=2$$

۲۳- دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال عدد ظاهرشده یکی از تاس‌ها اول بوده و مجموع آنها حداقل ۶ است؟

۱) $\frac{۲}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$ ۳) $\frac{۱۱}{۱۸}$ ۴) $\frac{۱۳}{۱۸}$

پاسخ ۲ پیشامد اینکه عدد ظاهرشده یکی از تاس‌ها اول باشد و مجموع آن‌ها حداقل ۶ باشد، به صورت زیر است:

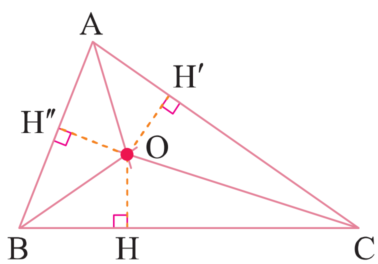
$A = \{(۱,۵), (۲,۴), (۳,۳), (۴,۲), (۵,۱), (۲,۵), (۳,۴), (۵,۲), (۴,۳), (۲,۶), (۳,۵),$
$(۵,۳), (۶,۲), (۳,۶), (۴,۵), (۵,۴), (۶,۳), (۵,۵), (۵,۶), (۶,۵)\}$

چون $n(A) = ۲۰$ است، پس $P(A) = \frac{۲۰}{۳۶} = \frac{۵}{۹}$ است.

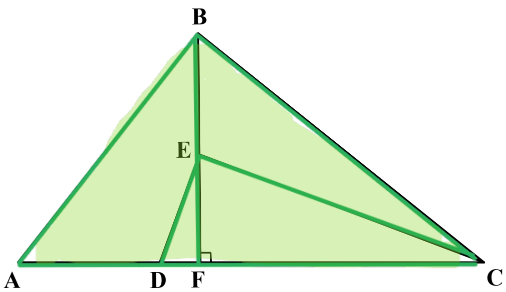
۲۶- فاصله کدام نقطه از سه ضلع مثلث ABC، همواره یکسان است؟

۱) تلاقی سه ارتفاع ۲) تلاقی سه میانه ۳) تلاقی سه نیمساز ۴) تلاقی سه عمود منصف

در هر مثلث، نیمسازهای داخلی همرس هستند و نقطهٔ همرسی آن‌ها از سه‌ضلع مثلث به یک فاصله است [*چون هر نقطه روی نیمساز، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است*] یعنی در مثلث زیر $OH = OH' = OH''$ است.



۲۹- در شکل زیر، $A\hat{B}C = C\hat{E}D = 90^\circ$ است. اگر $AD = 3$ ، $EF = 4$ و $DF = 1$ باشد، اندازه BC کدام است؟



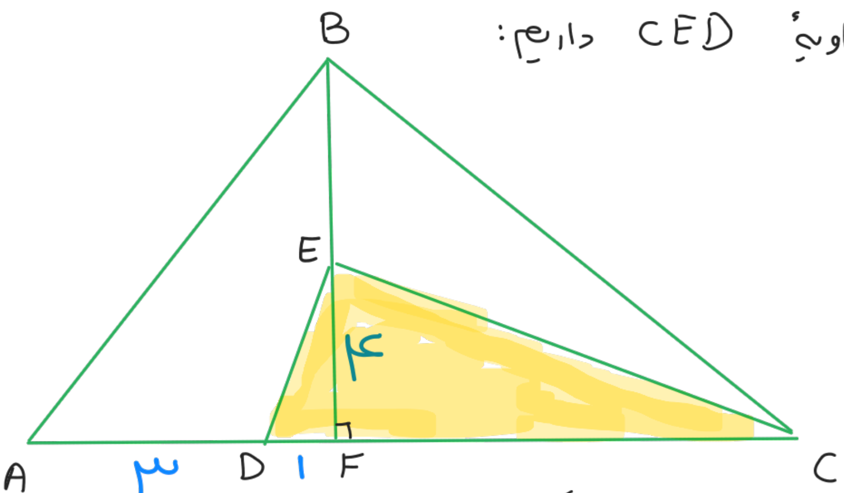
۱) $4\sqrt{6}$

۲) $10\sqrt{2}$

۳) $6\sqrt{3}$

۴) $8\sqrt{5}$

پاسخ ۴ در مثلث قائم الزاویهٔ CED داریم:



$$EF^2 = DF \times FC$$

$$\Rightarrow 4^2 = 1 \times FC \Rightarrow FC = 16$$

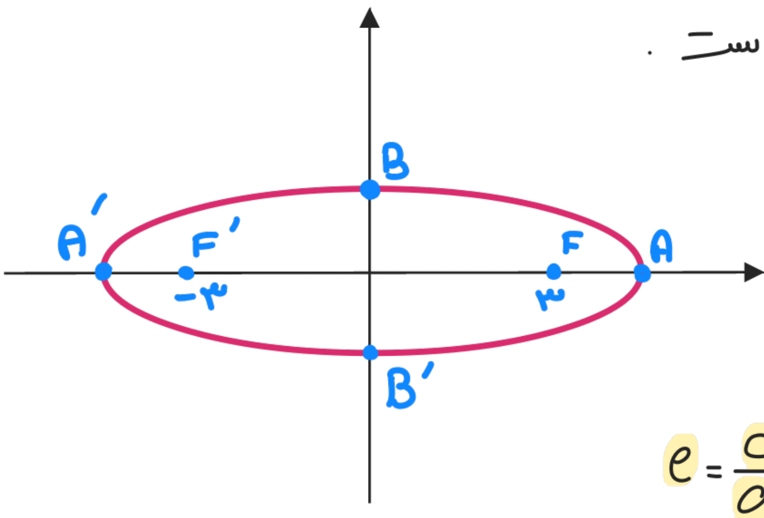
حالا به مثلث قائم الزاویهٔ ABC توجه کنید:

$$BC^2 = CF \times CA = 16 \times 20 \Rightarrow BC = 8\sqrt{5}$$

۳۵- کانون‌های یک بیضی نقاطی با طول $x = ۳$ و $x = -۳$ روی محور x ها هستند. اگر خروج از مرکز بیضی $\frac{۱}{۳}$ باشد، طول قطر کوچک این بیضی کدام است؟

۱) $۱۵\sqrt{۲}$ ۲) $۱۲\sqrt{۲}$ ۳) $۸\sqrt{۲}$ ۴) $۶\sqrt{۲}$

پاسخ ۲



مطابق شکل $FF' = ۲c = ۶$ است. پس $c = ۳$ است. در ضمن چون خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{۱}{۳}$ است، پس:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{۳}{a} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow a = ۹$$

حالا با استفاده از رابطه $a^۲ = b^۲ + c^۲$ داریم:

$$b^۲ = a^۲ - c^۲ = ۹^۲ - ۳^۲ = ۸۱ - ۹ = ۷۲ \Rightarrow b = ۶\sqrt{۲}$$

پس طول قطر کوچک بیضی برابر $BB' = ۲b = ۱۲\sqrt{۲}$ است.

! تایپیست محترم لطفاً حروف a و b و c را کوچک تایپ کنید. آن هارا هایلایت کرده ام